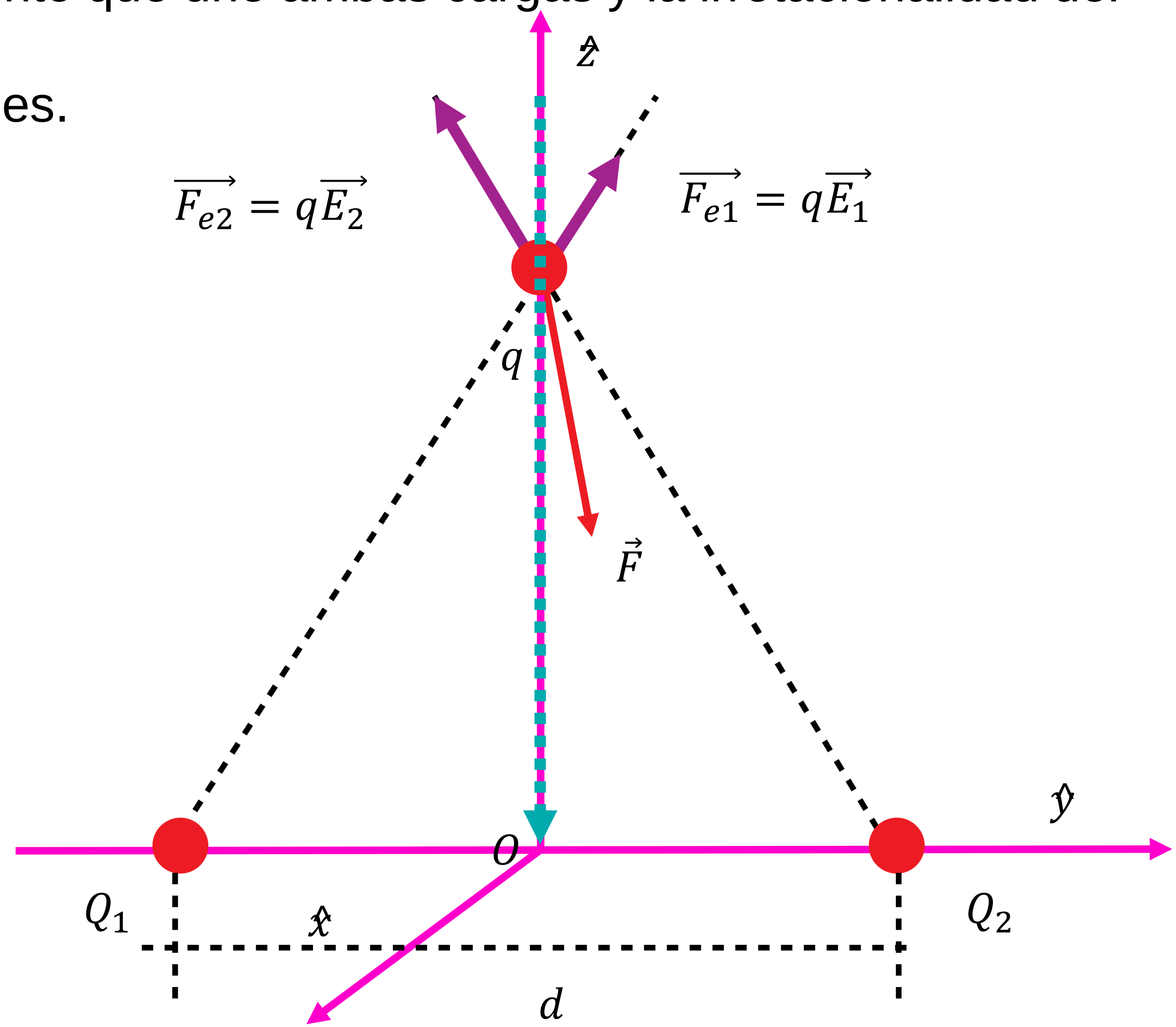
18. Dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 están separadas una distancia *d*.
a) Hallar el trabajo que es necesario realizar para traer en forma cuasiestacionaria otra carga *q* desde un punto muy alejado hasta el punto central del segmento que separa a Q_1 y Q_2.
b) Analice el resultado si las cargas son de igual valor absoluto y de signo diferente. Discuta la relación de los resultados con la dirección del campo eléctrico (Ayuda: considere la mediatriz del segmento que une ambas cargas y la irrotacionalidad del campo electrostático).
c) Idem b) si las cargas son iguales.

$$z_i \to z_f \quad \begin{cases} z_i \gg d \\ z_f = 0 \end{cases}$$



Desplazamiento cuasiestacionario $\Rightarrow$ $\vec{v} \approx \vec{0}$

$$\Delta E_C^{i\to f} = W_{Fe1}^{i\to f} + W_{Fe2}^{i\to f} + W_F^{i\to f}$$

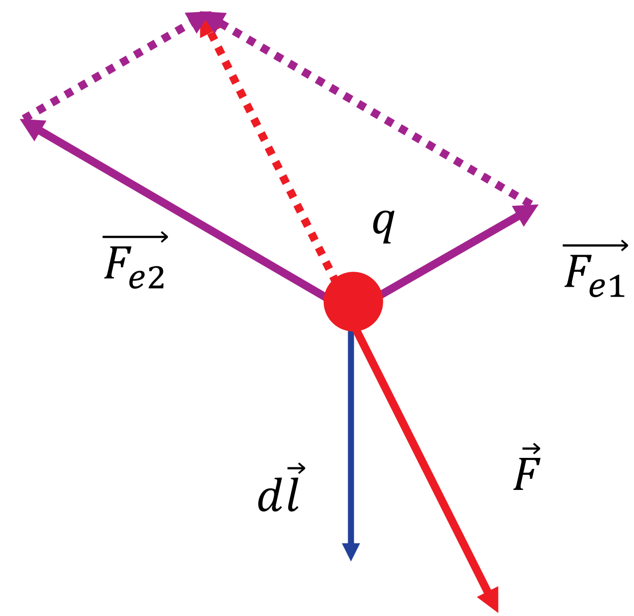
$$0 = W_{Fe1}^{i\to f} + W_{Fe2}^{i\to f} + W_F^{i\to f}$$

$$W_F^{i\to f} = -\left(W_{Fe1}^{i\to f} + W_{Fe2}^{i\to f}\right)$$

$$W_{F_{e1}}^{i\to f} = q\int \overrightarrow{E_1}\cdot d\vec{l} = \int \overrightarrow{F_{e1}}\cdot d\vec{l}$$

$$W_{F_{e2}}^{i\to f} = q\int \overrightarrow{E_2}\cdot d\vec{l} = \int \overrightarrow{F_{e2}}\cdot d\vec{l}$$

Análisis cualitativo



$$\boxed{W_F^{i\to f} > 0}$$

Vamos a calcular los trabajos...

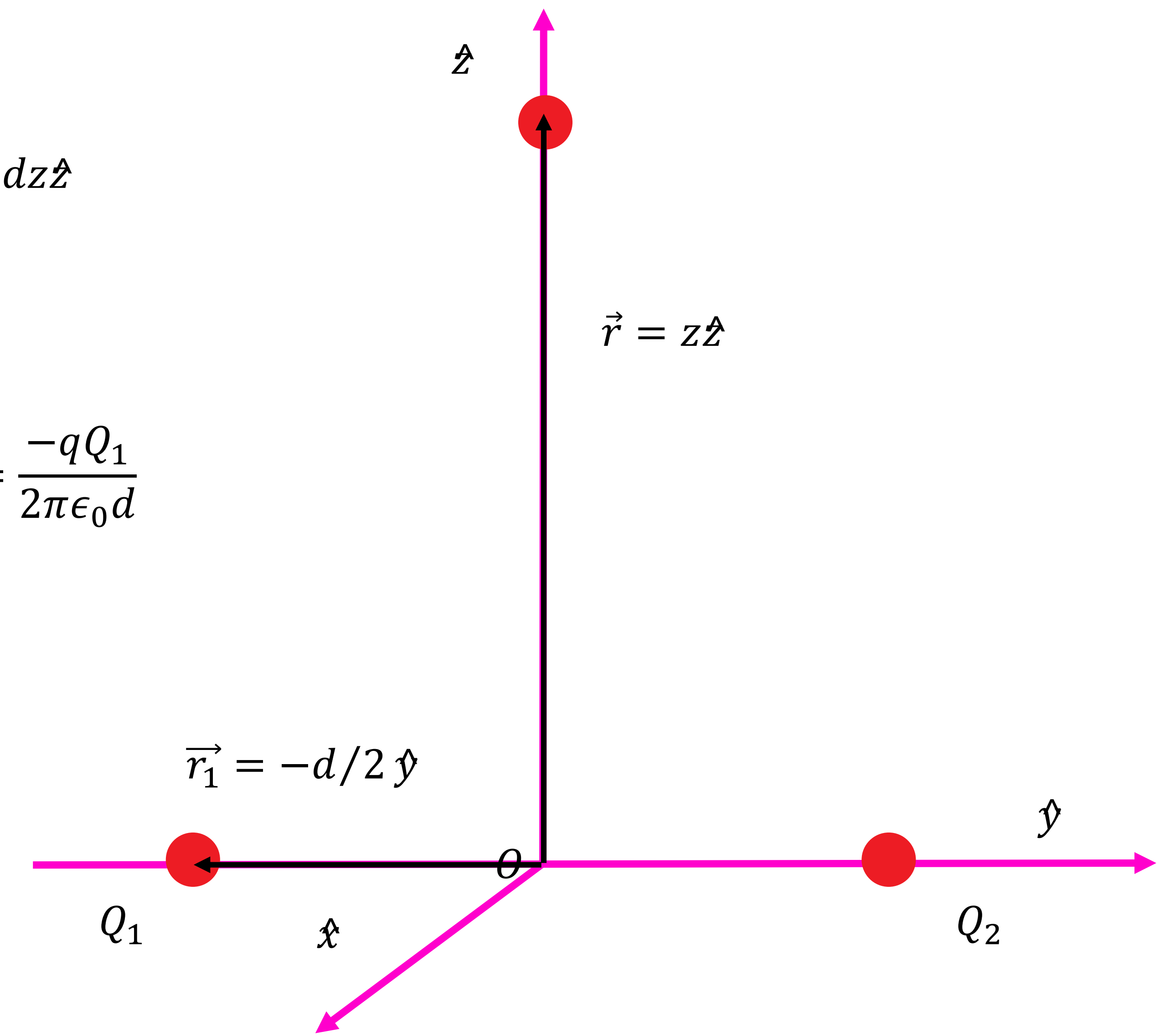
$$\overrightarrow{F_{e1}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ_1(\vec{r} - \overrightarrow{r_1})}{|\vec{r} - \overrightarrow{r_1}|^3}$$

$$W_{F_{e1}}^{i \to f} = \int \overrightarrow{F_{e1}} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{F_{e1}}^{i \to f} = \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{z\hat{z} + d/2\,\hat{y}}{(z^2 + d^2/4)^{3/2}} \cdot dz\hat{z}$$

$$W_{F_{e1}}^{i \to f} = \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{(z^2 + d^2/4)^{1/2}}\right]_{\infty}^{0} = \frac{-qQ_1}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$W_{F_{e1}}^{i \to f} = \frac{-qQ_1}{2\pi\epsilon_0 d}$$



Vamos a calcular los trabajos...

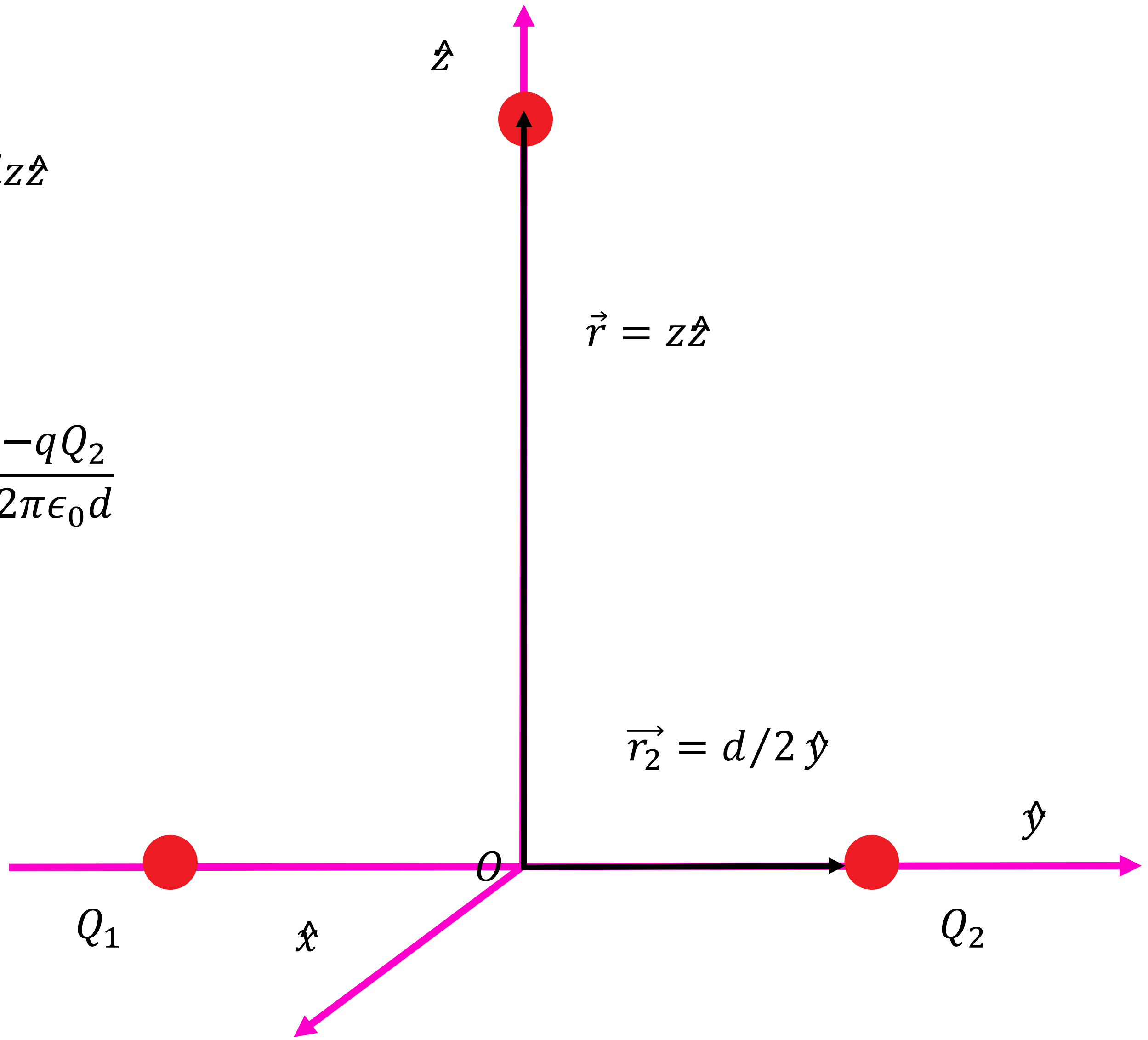
$$\overrightarrow{F_{e2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ_2(\vec{r}-\overrightarrow{r_2})}{|\vec{r}-\overrightarrow{r_2}|^3}$$

$$W_{F_{e2}}^{i\to f} = \int \overrightarrow{F_{e2}} \cdot d\vec{l}$$

$$W_{F_{e2}}^{i\to f} = \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{z\hat{z} - d/2\,\hat{y}}{(z^2+d^2/4)^{3/2}} \cdot dz\hat{z}$$

$$W_{F_{e2}}^{i\to f} = \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{-1}{(z^2+d^2/4)^{1/2}}\right]_{\infty}^{0} = \frac{-qQ_2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$W_{F_{e2}}^{i\to f} = \frac{-qQ_2}{2\pi\epsilon_0 d}$$



Volviendo al planteo...

$$\Delta E_C^{i\to f} = W_{Fe1}^{i\to f} + W_{Fe2}^{i\to f} + W_F^{i\to f}$$

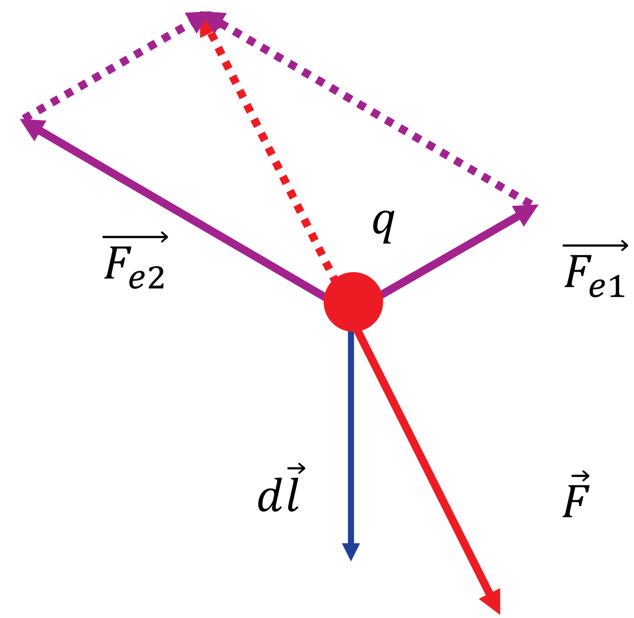
$$0 = W_{Fe1}^{i\to f} + W_{Fe2}^{i\to f} + W_F^{i\to f}$$

$$W_F^{i\to f} = -\left(W_{Fe1}^{i\to f} + W_{Fe2}^{i\to f}\right)$$

$$W_F^{i\to f} = -\left[\frac{-q(Q_1 + Q_2)}{2\pi\epsilon_0 d}\right]$$

$$\boxed{W_F^{i\to f} = \frac{q(Q_1 + Q_2)}{2\pi\epsilon_0 d}}$$

Análisis cualitativo



$$\boxed{W_F^{i\to f} > 0}$$

¿Fue el planteo suficientemente genérico?

Defino la trayectoria *cif*

$$W_{F_{e1}}^{c\to i} = \int \overrightarrow{F_{e1}} \cdot d\vec{l}$$

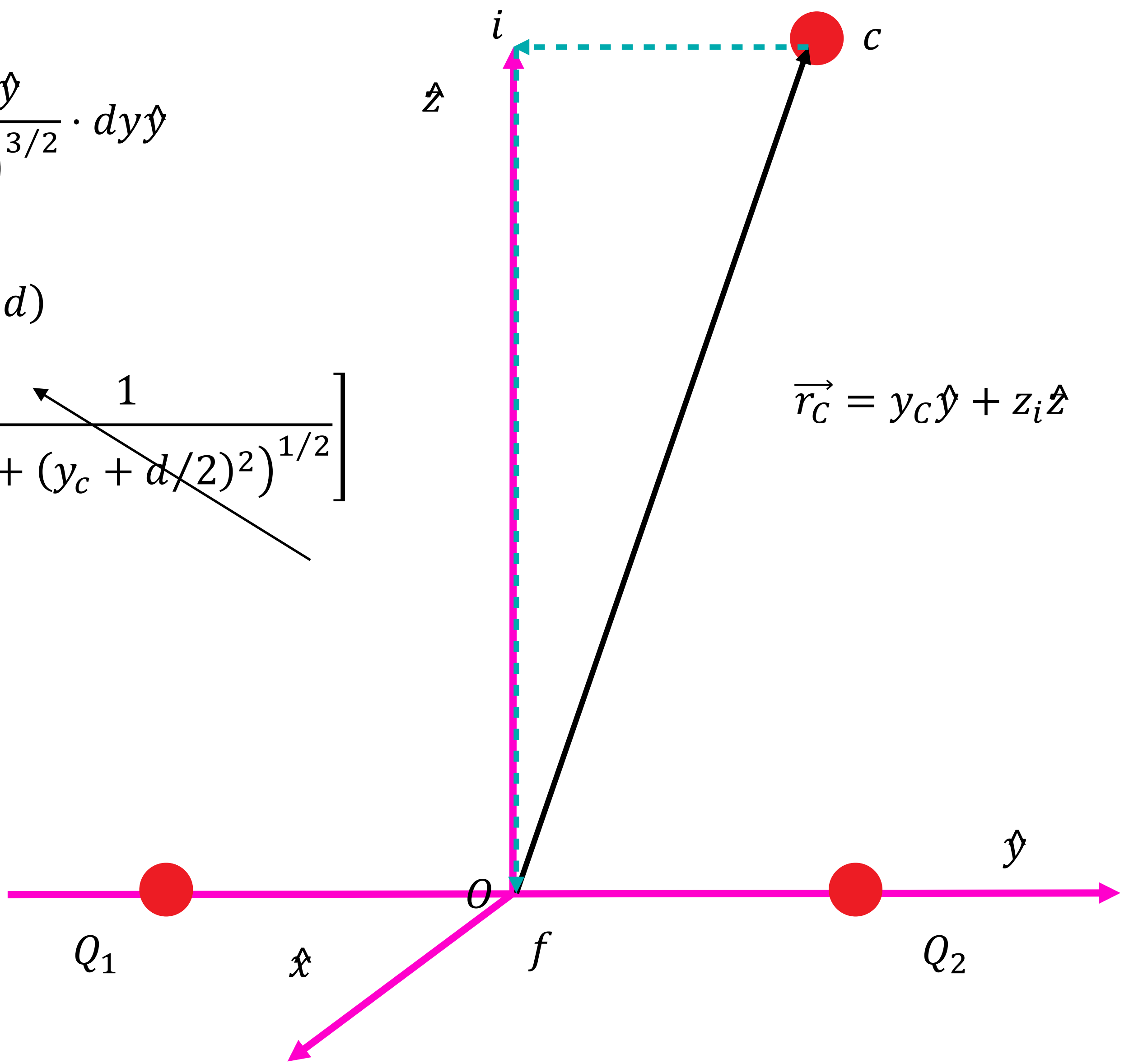
$$W_{F_{e1}}^{c\to i} = \frac{qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{y\hat{y} + z_i\hat{z} + d/2\,\hat{y}}{\left(z_i^2 + (y + d/2)^2\right)^{3/2}} \cdot dy\hat{y}$$

$0(z_i \gg d)$

$$W_{F_{e1}}^{c\to i} = \frac{-qQ_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\left(z_i^2 + d^2/4\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(z_i^2 + (y_c + d/2)^2\right)^{1/2}}\right]$$

$$W_{F_{e1}}^{c\to i} = 0$$

$$W_{F_{e1}}^{c\to f} = \frac{-qQ_1}{2\pi\epsilon_0 d}$$



¿Fue el planteo suficientemente genérico?

$$W_{F_{e2}}^{c\to i} = \int \overrightarrow{F_{e2}} \cdot d\vec{l}$$

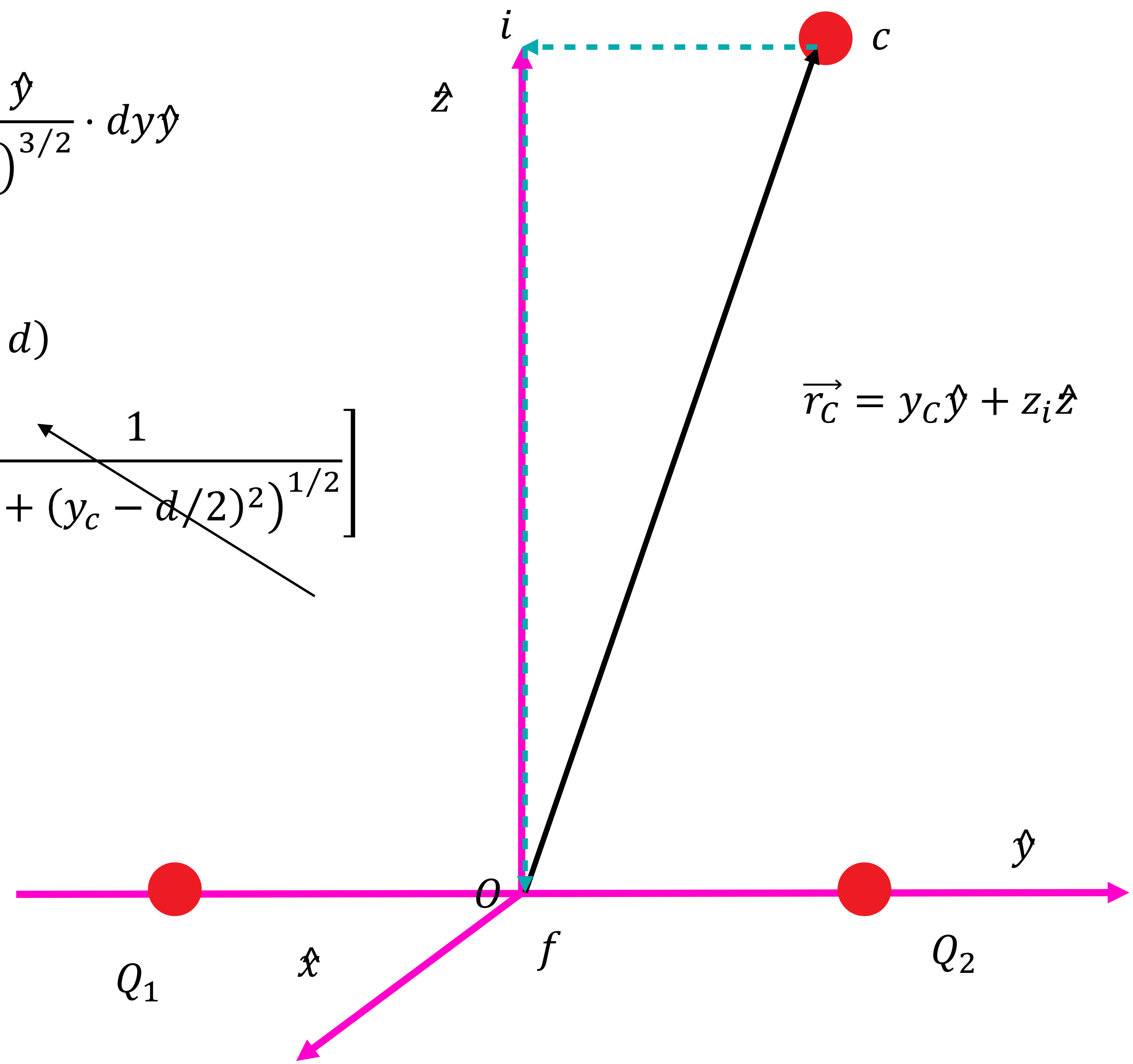
$$W_{F_{e2}}^{c\to i} = \frac{qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{y\hat{y} + z_i\hat{z} - d/2\,\hat{y}}{\left(z_i^2 + (y - d/2)^2\right)^{3/2}} \cdot dy\hat{y}$$

$$0 (z_i \gg d)$$

$$W_{F_{e2}}^{c\to i} = \frac{-qQ_2}{4\pi\epsilon_0}\left[\cancel{\frac{1}{\left(z_i^2 + d^2/4\right)^{1/2}}} - \cancel{\frac{1}{\left(z_i^2 + (y_c - d/2)^2\right)^{1/2}}}\right]$$

$$W_{F_{e2}}^{c\to i} = 0$$

$$W_{F_{e2}}^{c\to f} = \frac{-qQ_2}{2\pi\epsilon_0 d}$$



¿Fue el planteo suficientemente genérico?

$$W_{F_{ei}} = \oint \overrightarrow{F_{ei}} \cdot d\vec{l}$$

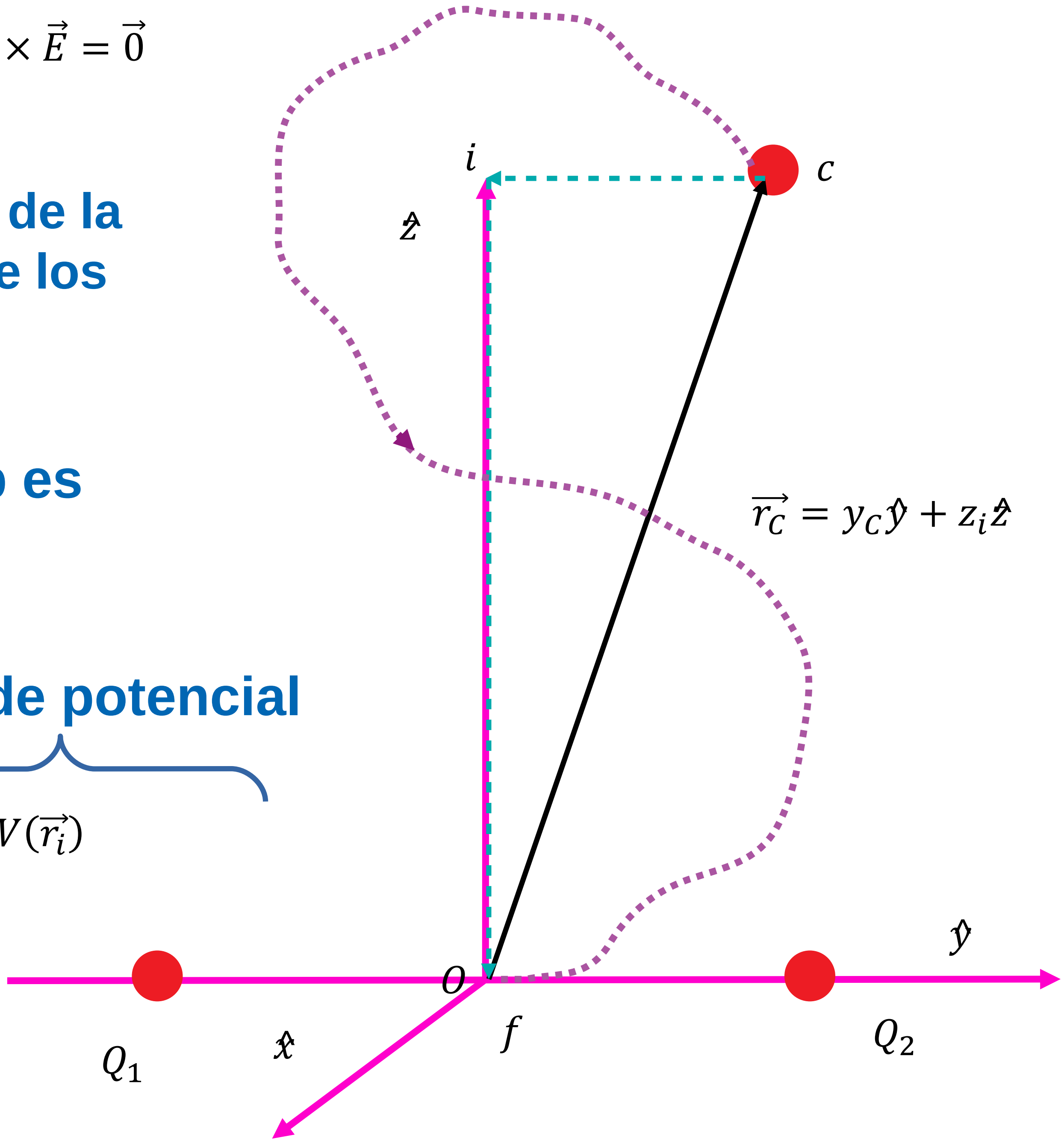
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

El trabajo es independiente de la trayectoria, solo depende de los puntos inicial y final

La fuerza de Coulomb es CONSERVATIVA

Diferencia de potencial

$$\frac{W_{\overrightarrow{rf},\overrightarrow{ri}}}{q} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \underbrace{V(\overrightarrow{r_f}) - V(\overrightarrow{r_i})}$$



Otra manera de calcular el trabajo de $\vec{F}$

$$\left[V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})\right]_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r_f} - \vec{r_Q}|} - \frac{1}{|\vec{r_i} - \vec{r_Q}|}\right)$$

Para una carga puntual en $\vec{r_Q}$

Calculo la diferencia de potencial producida por Q_1

$$\left[V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})\right]_{Q_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{0} + d/2\,\hat{y}|} - \frac{1}{|z_i\hat{z} + d/2\,\hat{y}|}\right)$$

$0 (z_i \gg d)$

$$\left[V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})\right]_{Q_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d/2} - \frac{1}{\sqrt{z_i^2 + d^2/4}}\right)$$

$$\left[V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})\right]_{Q_1} = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 d}$$

Otra manera de calcular el trabajo de $\vec{F}$

Calculo la diferencia de potencial producida por Q_2

$$\left[V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})\right]_{Q_2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left|\vec{0} - d/2\,\hat{y}\right|} - \frac{1}{\left|z_i\hat{z} - d/2\,\hat{y}\right|}\right)$$

$0(z_i \gg d)$

$$\left[V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})\right]_{Q_2} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{d/2} - \frac{1}{\sqrt{z_i^2 + d^2/4}}\right)$$

$$\left[V(\vec{r_f}) - V(\vec{r_i})\right]_{Q_2} = \frac{Q_2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

Otra manera de calcular el trabajo de $\vec{F}$

Aplico el principio de superposición

$$\left[V\left(\overrightarrow{r_f}\right) - V\left(\overrightarrow{r_i}\right)\right]_T = \left[V\left(\overrightarrow{r_f}\right) - V\left(\overrightarrow{r_i}\right)\right]_{Q_1} + \left[V\left(\overrightarrow{r_f}\right) - V\left(\overrightarrow{r_i}\right)\right]_{Q_2}$$

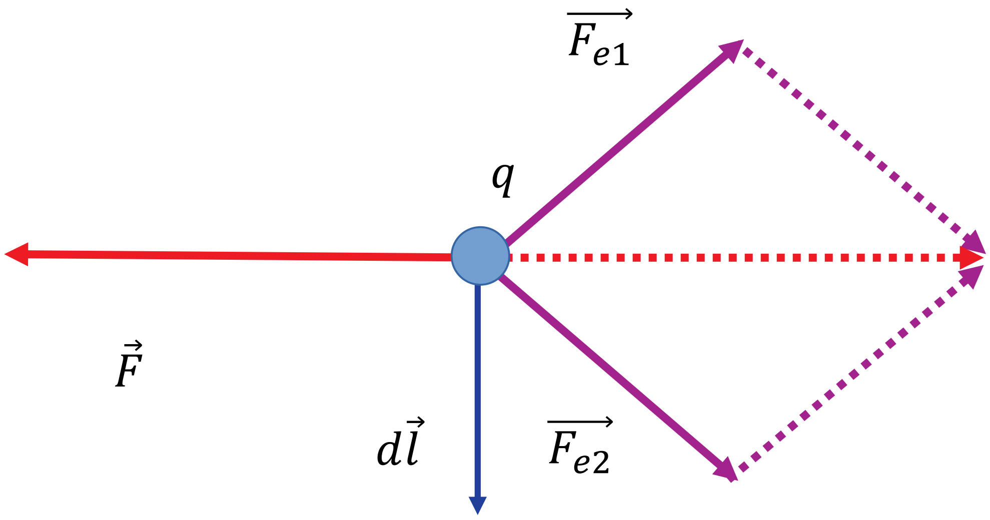
$$\left[V\left(\overrightarrow{r_f}\right) - V\left(\overrightarrow{r_i}\right)\right]_T = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$W_{\overrightarrow{rf},\overrightarrow{ri}} = -q\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\left[V\left(\overrightarrow{r_f}\right) - V\left(\overrightarrow{r_i}\right)\right]$$

$$\boxed{W_F^{i\to f} = \frac{q(Q_1 + Q_2)}{2\pi\epsilon_0 d}}$$

¿Qué ocurre si las cargas tienen igual valor absoluto y signo diferente? $Q_1 = -Q_2$

$$W_F^{i\to f} = \frac{q(Q_1 + Q_2)}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{q\big((-Q_2) + Q_2\big)}{2\pi\epsilon_0 d}$$



$$\boxed{W_F^{i\to f} = 0}$$

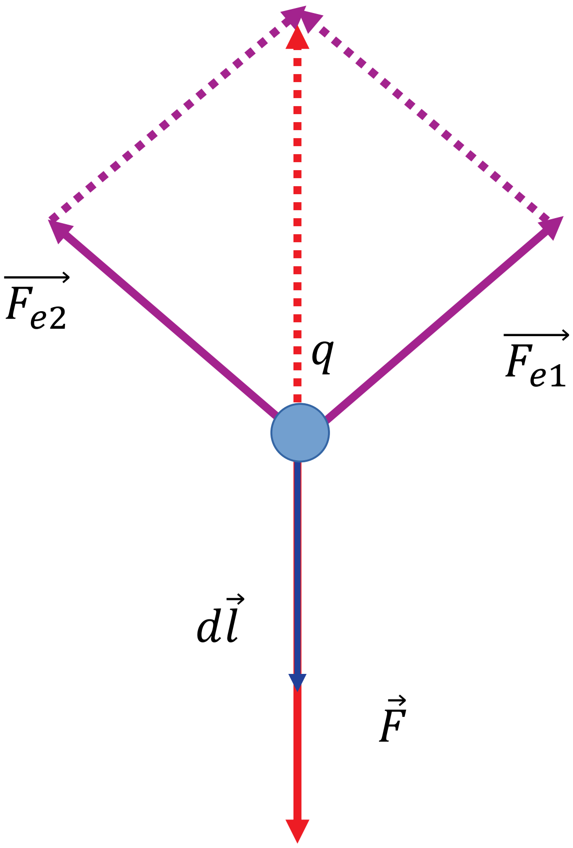
$$\boxed{W_F^{i\to f} = 0}$$

¿Qué ocurre si las cargas tienen igual valor? $Q_1 = Q_2$

$$W_F^{i\to f} = \frac{q(Q_1 + Q_2)}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{q(Q_2 + Q_2)}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$W_F^{i\to f} = \frac{q(Q_2 + Q_2)}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$\boxed{W_F^{i\to f} = \frac{qQ_2}{\pi\epsilon_0 d}}$$



$$\boxed{W_F^{i\to f} > 0}$$